Modelos matemáticos.

- Conocimiento y entrendimiento para el manejo de las herramientas.
- Entendimiento inicialmente empírico, reforzado con la aplicación de leyes.
- Solución de problemas con doble enfoque: empirismo y análisis teórico.

Proceso de solución de problemas en Ingeniería.

1. Definición del problema.
2. Modelo matemático (mezcla de ingredientes: teoría y datos).
3. Manejo de herramientas: computadora, estadísticas, métodos numéricos, gráficas.
4. Resultados numéricos o gráficos.
5. Interfaces grupales: programación, optimización, comunicación, socialización.
6. Implantación o implementación.

Modelo matemático.

Puede ser definido de manera amplia, como una formulación o una ecuación que expresa las características esenciales de un sistema físico o proceso, en términos matemáticos.
De manera general, el modelo puede representarse como una relación funcional de la forma:

$$\text{variable dependiente} = f(\text{variables independientes},\ \text{parámetros},\ \text{funciones de fuerza})$$

variable dependiente: es la característica que refleja el comportamiento o estado de un sistema.

variables independientes: son dimensiones, tales como el tiempo y el espacio a través de los cuales se determina el comportamiento del sistema.

parámetros: son reflejo de las propiedades o la composición del sistema.

funciones de fuerza: son las infleucias externas que actúan sobre el sistema.

La expresión matemática para la relación funcional de estos elementos puede ir desde una simple relación algebráica, hasta un conjunto de ecuaciones diferenciales complejo y de gran magnitud.

Ejemplo

2a Ley de Newton del movimiento: "La razón de cambio del momentum con respecto al tiempo para un cuerpo, es igual a la fuerza resultante que actúa sobre él".

La expresión matemática o modelo de la 2a Ley de Newton del movimiento es:

$$F = ma$$

o ben:

$$a = \frac{F}{m}$$

Características típicas de los modelos matemáticos del mundo físico presentes en la ecuación:

- Describe un sistema o proceso natural en términos matemáticos.
- Idealiza y simplifica la realidad. Ignora los detalles insignificantes del proceso y se concentra en sus manifestaciones elementales.
- Conduce a resultados predecibles y, en consecuencia, puede emplearse con propósitos de predicción.

Ejemplo.

Utilización de la 2a Ley de Newton del movimiento para determinar la velocidad *terminal* de caída libre de un cuerpo, cerca de la superficie de la Tierra.

Recordando la definición de la cantidad física aceleración:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{F}{m}$$

La fuerza total que actúa cuerpo que cae cerca de la superficie de la Tierra es la resultante de sumar dos fuerzas contrarias: la atracción hacia abajo, debida a la gravedad F_D, y la fuerza hacia arriba debida a la resistencia del aire F_U.

$$F = F_D + F_U$$

$$F_D = mg \qquad ; \qquad F_U = -cv$$

c: coeficiente de resistencia o arrastre (constante de proporcionalidad). Entónces:

$$F = mg - cv$$

y, por lo tanto:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{mg - cv}{m} = g - \frac{c}{m}v \tag{1}$$

La ecuación 1 es un modelo que relaciona la aceleración de un cuerpo que cae, con las fuerzas que actúan sobre él. Su solución exacta no puede obtenerse mediante manipulaciones algebraicas sencillas u operaciones aritméticas simples. Pueden emplearse herramientas del Cálculo para obtener una solución exacta o analítica. Si el cuerpo que cae es el de un paracaidista, quien está inicialmente en reposo ($v = 0$ en $t = 0$), aplicando Cálculo puede obtenerse una solución para la ecuación diferencial 1 en la forma de la ecuación 2:

$$v(t) = \frac{gm}{c}\left[1 - e^{-\left(\frac{c}{m}\right)t}\right] \tag{2}$$

Donde:

v(t): variable dependiente.

t: variable independiente.

c,m: parámetros.

g: función de fuerza.

Aún cuando se contrapone a la propuesta del empleo de los Métodos Numéricos, y excede los alcances de esta exposición, se muestra la naturaleza de los recursos matemáticos necesarios para alcanzar la satisfacción plena (mediante el uso de una ecuación como 2), de una expresión en la forma de la ecuación 1:

$$v(t) = \int [\mathrm{d}v] \quad \mathrm{d}t = \int \left[g - \frac{c}{m}v\right] \quad \mathrm{d}t \tag{3}$$

Ejemplo:

Solución analítica a la interrogante de ¿Cuál será la velocidad terminal que experimenta un paracaidista en caida libre?

Un paracaidista con una masa $m = 68.1$ kg salta de un globo aerostático fijo. Aplique la solución analítica exacta provista por la ecuación 2, para calcular la velocidad del cuerpo del paracaidista antes de abrir el paracaidas. El coeficiente de resistencia para el aire es de aproximadamente 12.5 $\frac{\text{kg}}{\text{s}}$.

Solución:

Sustituyendo los valores de los parámetros:

$$v(t) = \frac{9.803017921967(68.1)}{12.5}\left[1 - e^{-\left(\frac{12.5}{68.1}\right)t}\right] = 53.4068416388762\left[1 - e^{-(0.18355359765)t}\right]$$

Evaluando:

t (s)	v ($\frac{\text{m}}{\text{s}}$)
0	0
2	16.41003273674134
4	27.77784305108615
6	35.65272748404589
8	41.10793856847239
10	44.88695630885907
12	47.50481561093567
14	49.31829937742565
16	50.57456374912584
18	51.4448225299132
20	52.04768157980612
∞	53.4068416388762

En Matlab:

```
> format long g; ↵
> t = 0:2:20; ↵
> v = 9.803017921967 * 68.1 / 12.5 * (1 - exp(-12.5 / 68.1 *t )); ↵
> tabla = [t' v'] ↵
tabla =

  0   0
  2   16.41003273674134
  4   27.77784305108615
  6   35.65272748404589
  8   41.10793856847239
  10   44.88695630885907
  12   47.50481561093567
  14   49.31829937742565
  16   50.57456374912584
  18   51.4448225299132
  20   52.04768157980612

> plot(t,v) ↵
> xlabel('tiempo (s)') ↵
```

```
> ylabel('velocidad (m/s)') ↵
> title('Velocidad del paracaidista en caida libre') ↵
```

Estos valores proporcionan una solución exacta dado que se generan con una expresión que satisface con exactitud la ecuación diferencial original.
Por desgracia, muchos modelos matemáticos no se pueden resolver fácilmente con exactitud. La alternativa en muchas ocasiones consiste en desarrollar una solución numérica que se aproxime a la solución exacta.
Los métodos numéricos son aquellos en los que se formula el problema matemático para que se pueda resolver mediante operaciones aritméticas.

Si se *aproxima* la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo:

$$\frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v\left(t_{i+1}\right) - v\left(t_i\right)}{t_{i+1} - t_i} \tag{4}$$

Δv, Δt son diferencias en la velocidad y en el tiempo, considerados intervalos finitos.

$v\left(t_i\right)$ es la velocidad en el tiempo inicial t_i.

$v\left(t_{i+1}\right)$ es la velocidad en un instante de tiempo posterior t_{i+1}.

Aún cuando se reconozca que:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

La sustitución a considerar, y que proviene de 4 se denomina *diferencia finita dividida*, y es una aproximación al valor de la derivada en el tiempo t_i.

Así, recordando 1 y sustituyendo en ella el miembro derecho de 4:

$$\begin{aligned} \frac{v\left(t_{i+1}\right) - v\left(t_i\right)}{t_{i+1} - t_i} &= g - \tfrac{c}{m} v\left(t_i\right) \\ v\left(t_{i+1}\right) - v\left(t_i\right) &= \left[g - \tfrac{c}{m} v\left(t_i\right)\right]\left(t_{i+1} - t_i\right) \end{aligned}$$

$$v\left(t_{i+1}\right) = v\left(t_i\right) + \left[g - \frac{c}{m} v\left(t_i\right)\right]\left(t_{i+1} - t_i\right) \tag{5}$$

La ecuación diferencial se transforma en la ecuación algebraica 5, permitiendo calcular la velocidad en t_{i+1} usando una pendiente y los valores anteriores de v y de t.
Si se da un valor inicial a la velocidad en un tiempo t, se puede calcular fácilmente la velocidad en un tiempo posterior t_{i+1}. Este nuevo valor de velocidad puede aprovecharse para calcular la velocidad en un instante de tiempo posterior t_{i+2}, y así sucesivamente.

$$v(0 \text{ s}) = 0 \ \tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v(2 \text{ s}) = v(0 \text{ s}) + \left(g - \frac{c}{m} v(0 \text{ s})\right)(2 \text{ s} - 0 \text{ s}) = 0 + \left(9.803017921967 - \frac{12.5}{68.1}(0)\right)(2)$$

$$v(2 \text{ s}) = 19.606035843934 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

t (s)	v ($\frac{m}{s}$)
0	0
2	19.606035843934
4	32.01455485822996
6	39.86781725934826
8	44.83809052642901
10	47.98374071455206
12	49.97460008471511
14	51.23460065525883
16	52.03204595027255
18	52.53674333962779
20	52.85616268590107
∞	53.4068416388762

En Matlab:

```
> format long g; ⏎
> g = 9.803017921967; ⏎
> m = 68.1; ⏎
> c = 12.5; ⏎
> t = 0:2:20; ⏎
> v(1) = 0; ⏎
> for i = 1:length(t) - 1 ⏎
>         v(i+1) = v(i) + (g - c / m * v(i)) * (t(i+1) - t(i)); ⏎
> end; ⏎
> tabla=[t' v'] ⏎
tabla =

  0   0
  2   19.606035843934
  4   32.01455485822996
  6   39.86781725934826
  8   44.83809052642901
  10   47.98374071455206
  12   49.97460008471511
  14   51.23460065525883
  16   52.03204595027255
  18   52.53674333962779
  20   52.85616268590107

> plot(t,v) ⏎
> xlabel('tiempo (s)') ⏎
> ylabel('velocidad (m/s)') ⏎
> title('Velocidad aproximada del paracaidista en caida libre') ⏎
```